Exercice 1. Soit la fonction f définie par $f(x) = |x+2| - |x-1|$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f.
2) Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx$.
3) En déduire la valeur moyenne de f sur $[-3,3]$.

Exercice 2. Calculer directement les intégrales suivantes :

$$I = \int \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx,\ J = \int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx,\ K = \int \frac{2x}{1+x^4}\,dx,\ L = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

Application: Déduire les valeurs des intégrales définies suivantes : $\displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{2x}{1+x^4}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par partie :

$$I_1 = \int (x+1)e^{2x}\,dx,\ I_2 = \int \arctan x\,dx,\ I_3 = \int e^x \sin(x)\,dx,\ I_4 = \int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx\ (n\in\mathbb{N}^*),\ I_5 = \int \ln(x^2+1)dx.$$

Exercice 4. En utilisant un changement de variable adéquat, calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx,\ J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\,dx,\ J_3 = \int \sqrt{x^2+1}\,dx,$$

$$J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx,\ J_5 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx,\qquad J_6 = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Exercice 5. On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$.
1) Calculer $I+J$.
2) Dans I, en posant le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, montrer que $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 6.
1) Calculer les intégrales des fractions rationnelles suivantes :

$$\int \frac{5x^3+x^2-22x-1}{x^3-4x}\,dx,\ \int \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}\,dx,\ \int \frac{2x^3+1}{x^2+4}\,dx, \int \frac{1}{x(x^2-4x+5)}\,dx.$$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{e^x}{1+e^x+e^{2x}}dx, \int \frac{1}{1+\cos x}\,dx\,,\ \int \frac{1+\sinh x}{2+\cosh x}\,dx\,,\ \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx\,, \int \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x+2}dx.$$

Exercice 7. En utilisant la linéarisation, calculer les intégrales suivantes :

$$\int \sin^4 x\,dx,\ \int \cos^4 x\,\sin^2 x\,dx,\ \int \cosh^2 x\,dx.$$

Exercice 8.
1) Représenter le domaine $\mathcal{D}_1$ limité par les courbes $y = x^2$, $y = x$, puis calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$.
2) Mêmes questions pour le domaine $\mathcal{D}_2$ limité par les droites $y = x+1$, $y = -x+1$ et $x = 2$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1. Soit la fonction en escaliers définie par: $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \in [-1, 1[\\ -1 & \text{si} \quad x \in [1, 3[\\ 2 & \text{si} \quad x \in [3, 4[\end{cases}$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

2) Calculer les intégrales $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{-1}^4 f(x)\,dx$.

3) En déduire la valeur moyenne de f sur $[-1, 4]$.

Exercice 2.
Calculer à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes :

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx,\ \int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},\ \int \frac{\sqrt{2x-3}}{1+2\sqrt{2x-3}}\,dx,\ \int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Exercice 3.
1) Intégrer les fonctions rationnelles suivantes :

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx,\ \int \frac{x+2}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx,\ \int \frac{2x+1}{x^4-4x^2+3}\,dx,\ \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx.$$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sinh x + 2\cosh x},\ \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx,\ \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx,\ \frac{\cosh^3 x}{2+3\sinh x}\,dx.$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \cos(2x)\cos x\,dx,\ \int \sin(3x)\sin(2x)\,dx,\ \int \sin(x)\cos(5x)\,dx,\ \int \sinh^6 x\,dx,\ \int \cos^4 x \sin^6 x\,dx.$$

Exercice 5.
1) Représenter le domaine $\mathcal{D}_1$ limité par les courbes $y = 2x$, $y = 3x$ et $y = \dfrac{1}{x^2}$, puis calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$.

2) Mêmes questions pour le domaine $\mathcal{D}_2$ limité par les droites $y = 4x$, $y = -2x$ et $x = 4$.