Équations différentielles du premier ordre linéaires

Exercice 1 (Cours+TD)
Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle de résolution

1. $(2+x)y' = -y$

2. $ch(x)y' - sh(x)y = 1$

3. $xln(x)y' - y = 3\left(xln(x)\right)^2$

4. $(x^2-1)y' + xy = -1$

5. $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ avec $y(0) = 3$

Exercice 2 (Cours+TD)

1. Donner une équation différentielle linéaire du premier ordre où f définie par
$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, \qquad \text{est solution.}$$
2. Trouver une courbe du plan passant par le point $M(0,3)$ et dont la pente de la tangente au point (x,y) est de $\dfrac{2y}{x}$.

Exercice 3 (TD)
Soit l'équation différentielle suivante :
$$2y' - y = -x^2 - x. \tag{1}$$

1. Déterminer les réels a, b et c pour que $y = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de (1).
2. Résoudre l'équation (1), puis déduire la solution qui vérifie $y(-1) = 5$.

Exercice 4 (Cours)
Soit l'équation différentielle suivante :
$$y' - \frac{1}{x}y - y^2 = -9x^2. \tag{2}$$

1. Déterminer $a \in]0,\infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (2).
2. Montrer que le changement de fonction : $y(x) = y_0 - \dfrac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (2) en l'équation différentielle linéaire suivante
$$z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z = 1. \tag{3}$$
3. Résoudre l'équation différentielle (3) sur $]0,+\infty[$. En déduire la solution de (2) définies sur $]0,+\infty[$.

Équations différentielles du second ordre linéaires à coefficients constants

Exercice 5 (Cours+TD)

1. Donner une équation différentielle homogène du second ordre qui admet comme solutions les fonctions suivantes :
$$e^{2x} \text{ et } e^{-x}.$$
2. Trouver la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ telle que $f''(x) = 4 + \frac{2}{x^2}$ et la pente de la tangente à la courbe de f au point $P(1,2)$ est égale à 3.

Exercice 6 (Cours+TD)
Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle de résolution

1. $y'' - 4y' + 5y = 5$

2. $y'' - 2y' + y = \sqrt{x}e^x$

3. $y'' - 4y = sin(x)$

4. $y'' + 2y' + my = m^2$

5. $y'' + y = \dfrac{1}{cos(x)}$

6. $y'' + y' = 4x^2e^x$ avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$

Exercice 7 (Cours)
Un condensateur de capacite C se décharge dans une resistance R . On rappelle que la charge Q de ce condensateur verifie l'équation differentielle suivante :

$$R \times CQ'(t) + Q(t) = 0$$

$Q(t)$ est la charge du condensateur à l'instant t.

1. Quelle est la charge du condensateur à l'instant t, la charge initiale etant q_0 au temps $t = 0$?
2. Au bout de combien de temps, la charge du condensateur aura-t-elle diminue de moitie, le condensateur de capacite $C = 2\mu F$ se déchargeant dans une resistance $R = 10^5\Omega$?

Exercices supplémentaires

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $xln(x)y' = (3ln(x) + 1)y$

2. $yy' = e^{x-y}$

3. $xln(x)y' - y = 3x^2ln^2(x)$

4. $(\sin^3 x)y' = (2\cos x)y$

5. $(x^2 - 1)y' + xy + 1 = 0$

6. $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ avec $y(0) = 3$

Exercice 8. A l'aide d'un changement de fonction, résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

2. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = xe^x$, on pose $z = (1+e^x)y$

4. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, on pose $z = xy$

Exercice 9.

1. Donner une équation différentielle f est solution
$$f(x) = 1 + \frac{e^x}{1+x^2}.$$
2. Donner une équation différentielle ayant comme solutions
$$e^x \text{ et } xe^x, \quad e^{2x}cos(x) \text{ et } e^{2x}sin(x).$$

Exercice 10. Soit l'équation différentielle suivante :
$$y' + y = e^{-x}. \tag{4}$$

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $y_0(x) = axe^{-x}$ soit une solution particulière de (4).
2. Résoudre l'équation différentielle (4).
3. Déduire la solution qui vérifie $y(0) = 2$.

Exercice 11. On considère l'équation différentielle suivante :
$$y'' + \frac{2}{tan(x)}y' - y = 0. \tag{5}$$

1. Montrer que le changement de fonction : $z = y' + \frac{1}{tan(x)}y$ transforme l'équation (5) en l'équation différentielle
$$z' + \frac{1}{tan(x)}z = 0. \tag{6}$$
2. Résoudre l'équation différentielle (6).
3. En déduire les solutions de (5).
4. Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles prolongeables en 0 ?