Sommes de Riemann et Intégrales définies

Exercice 1 (TD)

1) Soit la somme $S_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$.

a) Écrire S_n sous la forme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$, où f est une fonction à préciser.

b) En utilisant les sommes de Riemann, déterminer la limite de S_n.

Exercice 2 (TD)

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x+2| - |x-1|$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

2) Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx$.

3) En déduire la valeur moyenne de f sur $[-3,3]$.

Quelques procédés du calcul intégral

Exercice 3 [Primitives immédiates (Cours+TD)]

Calculer directement les intégrales suivantes

$$I = \int \left(2t + \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt,\ J = \int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx,\ K = \int \frac{t}{1+t^4}\,dt,\ L = \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

Application : Déduire les valeurs des intégrales définies suivantes : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,dx$.

Exercice 4 [Intégration par parties (Cours+TD)]

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int (x^2+1)e^x\,dx,\ I_2 = \int \arctan x\,dx,\ I_3 = \int e^x \sin(2x)\,dx,\ I_4 = \int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx\ (n \in \mathbb{N}^\star),$$

$$I_5 = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Exercice 5 [Changement de variable (Cours+TD)]

En utilisant le changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes

$$J_1 = \int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx\ (t = \ln x),\ J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\,dx\ (t = sinx),\ J_3 = \int \sqrt{x^2+1}\,dx\ (y = \sinh x),$$

$$J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx\,(y = \tan x),\ J_5 = \int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx\,(y = \sqrt{x+1}).$$

Exercice 6 (TD)

On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$.

1) Calculer $I+J$.

2) Dans I, en posant le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, montrer que $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 7 [Fonctions rationnelles (Cours+TD)]

1) En utilsant la décomposition en éléments simples, calculer les intégrales suivantes

$$\int \frac{5x^3+x^2-22x-1}{x^3-4x}\,dx,\quad \int \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}\,dx,\quad \int \frac{1}{x(x^2-4x+5)}\,dx.$$

2) Calculer les intégrales suivantes

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx\,(t=\tan(\frac{x}{2})),\quad \int \frac{1+\sinh x}{2+\cosh x}\,dx\,(t=th(\frac{x}{2})),\quad \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx\,(t=\sqrt{x}),$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x\left(\sin^2 x-4\sin x+5\right)}\,dx\ (y=\sin x).$$

Exercice 8 [Linéarisation (Cours+TD)]

1) En utilisant la linéarisation, calculer les intégrales suivantes

$$\int \sin^4 x\,dx,\quad \int \cos^4 x\,\sin^2 x\,dx,\quad \int \cosh^2 x\,dx.$$

Exercice 9 [Application au calcul des intégrales (Cours)]

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}_1$ limité par les courbes $y=x^2$, $y=x$, puis calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$.

2) Mêmes questions pour le domaine $\mathcal{D}_2$ limité par les droites $y=x+1$, $y=-x+1$ et $x=2$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1

1) Écrire les expressions suivantes en utilisant le symbole $\sum$ **(TD)**.

$a)$ $U_n=3+9+27+81+\cdots+6561$, $b)$ $V_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$.

2) Soit la somme $R_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}+\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{3\pi}{n}+\ldots\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{n}$.

$a)$ Écrire R_n en utilisant le symbole $\sum$.

$b)$ Écrire R_n sous la forme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f(\frac{k}{n})$, où f est une fonction à préciser.

$c)$ En utilisant les sommes de Riemann, déterminer la limite de R_n.

3) Mêmes questions pour la somme $R_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\dfrac{n}{n^2+9}+\ldots\dfrac{n}{n^2+n^2}$.

Exercice 2

Soit la fonction en escaliers définie par : $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x\in[-1,1[\\ -1 & \text{si } x\in[1,3[\\ 2 & \text{si } x\in[3,4[\end{cases}$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

2) Calculer les intégrales $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{-1}^4 f(x)\,dx$.

3) En déduire la valeur moyenne de f sur $[-1,4]$.

Exercice 3

Calculer à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx, \quad \int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{x}, \quad \int \frac{\sqrt{2x-3}}{1+2\sqrt{2x-3}}\,dx, \quad \int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Exercice 4

1) Intégrer les fonctions rationnelles suivantes

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx, \quad \int \frac{x+2}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx, \quad \int \frac{2x+1}{x^4 4x^2+3}\,dx, \quad \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx.$$

2) Calculer les intégrales suivantes

$$\int \frac{dx}{\sinh x + 2\cosh x}, \quad \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx, \quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx, \quad \frac{\cosh^3 x}{2+3\sinh x}\,dx.$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes

$$\int \cos(2x)\cos x\,dx, \quad \int \sin(3x)\sin(2x)\,dx, \quad \int \sin(x)\cos(5x)\,dx, \quad \int \sinh^6 x\,dx, \quad \int \cos^4 x \sin^6 x\,dx.$$

Exercice 6

1) Représenter le domaine $\mathcal{D}_1$ limité par les courbes $y = 2x$, $y = 3x$ et $y = \dfrac{1}{x^2}$,
puis calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$.

2) Mêmes questions pour le domaine $\mathcal{D}_2$ limité par les droites $y = 4x$, $y = -2x$ et $x = 4$.